ΑΘΡΟΙΣΜΑ – ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΡΙΖΩΝ

Ι. ΑΘΡΟΙΣΜΑ – ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΡΙΖΩΝ

Θεώρημα (Τύποι του Vieta)

Έστω ότι η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2.
Αν συμβολίσουμε με S το άθροισμα $\mathbf{x_1+x_2}$ και με P το γινόμενο $\mathbf{x_1\cdot x_2}$, τότε:

1. $\mathbf{S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}}$
2. $\mathbf{P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}}$.

Σχόλιο

Ισχύει : $|x_1-x_2|=\left|\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}-\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right|=\left|\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}+\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right|=\left|\frac{2\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|\alpha|}$.

Παρατήρηση

Μία παράσταση $\Pi(x,\psi)$ με δύο μεταβλητές x,ψ λέγεται συμμετρική όταν δεν μεταβάλλεται με εναλλαγή των x,ψ, δηλαδή $\Pi(x,\psi)=\Pi(\psi,x)$.
Για παράδειγμα, οι παραστάσεις:

$$x+\psi,\ x\cdot\psi,\ x^3+\psi^3,\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{\psi^2},\ (2x+5)(2\psi+5)+3x\psi$$

είναι συμμετρικές παραστάσεις των μεταβλητών x,ψ.
Οι συμμετρικές παραστάσεις με δύο μεταβλητές x,ψ μπορούν να εκφραστούν από το άθροισμα $x+\psi$ και το γινόμενο $x\cdot\psi$ των x,ψ.
Είναι χρήσιμες οι παρακάτω ταυτότητες:
(i) $x^2+\psi^2=(x+\psi)^2-2x\psi$
(ii) $x^3+\psi^3=(x+\psi)^3-3x\psi(x+\psi)$.
Επομένως από το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$ μπορούμε να υπολογίσουμε συμμετρικές παραστάσεις των ριζών.

Παράδειγμα

Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $5x^2+9x-3=0$ να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

(i) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ (ii) $\frac{3}{x_1+2}+\frac{3}{x_2+2}$ (iii) $(x_1-x_2)^2$

(iv) $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$ (v) $x_1^3+x_2^3$

Λύση

Ισχύουν $x_1+x_2=-\frac{9}{5}$ και $x_1\cdot x_2=-\frac{3}{5}$, επομένως:

(i) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-\frac{9}{5}}{-\frac{3}{5}}=3$

(ii) $\frac{3}{x_1+2}+\frac{3}{x_2+2}=\frac{3(x_2+2)+3(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}=\frac{3(x_1+x_2)+12}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=\frac{-\frac{27}{5}+12}{-\frac{3}{5}-\frac{18}{5}+4}=-33$

(iii) $(x_1-x_2)^2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{81}{25}+\frac{12}{5}=\frac{141}{25}$

(iv) $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{\frac{81}{25}+\frac{6}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{111}{3}$

(v) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=-\frac{729}{125}-3\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{9}{5}\right)=-\frac{729}{125}-\frac{81}{25}=-\frac{1134}{125}$.

ΙΙ. ΕΞΙΣΩΣΗ Β ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΓΝΩΣΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΑΙ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΡΙΖΩΝ

Θεώρημα

Αν δύο αριθμοί $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ έχουν άθροισμα **S** και γινόμενο **P**, τότε οι αριθμοί αυτοί είναι ρίζες της εξίσωσης: $\mathbf{x^2-Sx+P=0}$.

Παρατηρήσεις

Με βάση το προηγούμενο **θεώρημα** μπορούμε:

Ι. Να κατασκευάσουμε μια εξίσωση **β βαθμού** όταν γνωρίζουμε τις ρίζες της ή το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της.

ΙΙ. Να βρούμε αμέσως τις ρίζες μιας εξίσωσης της μορφής $x^2-Sx+P=0$, βρίσκοντας δύο αριθμούς με άθροισμα S και γινόμενο P.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η εξίσωση που έχει ρίζες αντίστροφες των ριζών της εξίσωσης:

$$\mathbf{2x^2-15x-7=0}$$

Λύση

Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης που δίνεται τότε $x_1+x_2=\frac{15}{2}$ και $x_1\cdot x_2=-\frac{7}{2}$.

Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της ζητούμενης εξίσωσης τότε $\rho_1=\frac{1}{x_1}$ και $\rho_2=\frac{1}{x_2}$, οπότε

$$S=\rho_1+\rho_2=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{\frac{15}{2}}{-\frac{7}{2}}=-\frac{15}{7} \text{ και}$$

$$P=\rho_1\cdot\rho_2=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{-\frac{7}{2}}=-\frac{2}{7}$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι: $x^2+\frac{15}{7}x-\frac{2}{7}=0 \Leftrightarrow 7x^2+15x-2=0$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

Άθροισμα – Γινόμενο Ριζών

1. Αν οι εξισώσεις $x^2+7x-6=0$ και $(x-\alpha)\cdot(x-\beta)=0$ έχουν τις ίδιες λύσεις, τότε το άθροισμα $\alpha^3+\beta^3$ είναι ίσο με

Α. 0 Β. 30 Γ. 45 Δ. 49 Ε. 61

2. Αν x_1, x_2 με $x_1\neq x_2$ είναι ρίζες της εξίσωσης $\frac{x^2}{p}-qx+\frac{c}{p^2}=0$, $p\neq 0$ και ισχύει $\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=x_1^2-x_2^2$, τότε το γινόμενο $c\cdot q$ είναι ίσο με

Α. -1 Β. $-\frac{1}{4}$ Γ. $-\frac{1}{3}$ Δ. $\frac{1}{2}$ Ε. 1

3. Αν η εξίσωση $2x^2+\alpha x-\frac{5}{2}=0$ έχει ρίζες x_1, x_2 και η εξίσωση $5x^2-8x-4\beta=0$ έχει ρίζες $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$, τότε το άθροισμα $\alpha+\beta$ είναι ίσο με

Α. 1 Β. 2 Γ. 3 Δ. 4 Ε. 5

4. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $17x^2+2x-3=0$, τότε το άθροισμα $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_1\cdot x_2}+\frac{1}{x_2^2}$ είναι ίσο με

Α. $\frac{9}{16}$ Β. $\frac{4}{9}$ Γ. $\frac{9}{4}$ Δ. $\frac{16}{9}$ Ε. $\frac{25}{16}$

5. Δίνονται οι εξισώσεις $x^2-(\lambda+1)x-3=0$, $x^2+(2\lambda-1)x+1=0$. Αν οι ρίζες της δεύτερης εξίσωσης είναι κατά μία μονάδα μεγαλύτερες από τις ρίζες της πρώτης εξίσωσης, τότε ο $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι ίσος με

Α. -1 Β. $-\frac{2}{3}$ Γ. $-\frac{1}{3}$ Δ. 0 Ε. 1

6. Αν οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $(\alpha+1)x^2-(3\alpha+2)x+3\alpha-1=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι αντίστροφες, τότε το άθροισμα x_1+x_2 είναι ίσο με

Α. $-\frac{5}{2}$ Β. $-\frac{3}{2}$ Γ. $\frac{1}{2}$ Δ. $\frac{3}{2}$ Ε. $\frac{5}{2}$

7. Αν x_1, x_2 με $x_1\neq x_2$ είναι ρίζες της εξίσωσης $2x^2-\beta x-3=0$, $\beta\in\mathbb{R}$ και ισχύει η σχέση $x_1^2-x_2^2=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$, τότε το β είναι ίσο με

Α. $-\frac{4}{3}$ Β. $-\frac{3}{4}$ Γ. -1 Δ. $\frac{4}{3}$ Ε. 2

8. Αν α, β είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2+\mu x+\nu=0$ και 3α, 3β είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2+(\mu-1)x-15=0$, τότε το άθροισμα $4\alpha+4\beta$ είναι ίσο με

Α. 1 Β. 2 Γ. 4 Δ. 12 Ε. 15

Εξίσωση με γνωστό άθροισμα και γινόμενο ριζών

9. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ και $x_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

Α. $2x^2+2x-1=0$ Β. $2x^2+2x+1=0$ Γ. $x^2+2x-1=0$

Δ. $x^2-2x-1=0$ Ε. $2x^2-2x-1=0$

10. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού και ισχύουν οι σχέσεις

$$2x_1+x_2(x_1+2)-8=0$$
$$2x_1x_2-x_1-x_2+9=0$$

τότε οι x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης

Α. $x^2+5x-2=0$ Β. $x^2+5x+2=0$ Γ. $x^2-5x+2=0$

Δ. $x^2-5x-2=0$ Ε. $x^2-2x-5=0$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άθροισμα – Γινόμενο Ριζών

11. Η εξίσωση $3x^2-2x-6=0$ έχει ρίζες x_1, x_2. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

(i) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ (ii) $(3x_1-2)\cdot(3x_2-2)$ (iii) $\frac{2}{x_1+3}+\frac{2}{x_2+3}$

(iv) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$ (v) $x_1^{-3}+x_2^{-3}$ (vi) $\frac{x_1}{x_2^2}+\frac{x_2}{x_1^2}$.

12. Αν x_1 και x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3\alpha x + \alpha^2 = 0$, να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η σχέση: $x_1^2 + x_2^2 = 112$.

13. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $x^2 + \left(2 - \alpha - \alpha^2\right)x - \alpha^2 = 0$ έχει ρίζες αντίθετες.

14. Να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - \left(4\alpha^2 + 7\alpha - 2\right)x + \left(6\alpha^2 + \alpha - 1\right) = 0$$

να είναι:

(i) Αντίθετες

(ii) Αντίστροφες.

15. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, αν είναι γνωστό ότι το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της εξίσωσης $x^2 - 4x + \alpha = 0$ είναι ίσο με 16.

16. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $x^2 - 2\alpha\left(x - 1\right) - 1 = 0$ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της.

17. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία μία ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \left(2\alpha - 1\right)x + \alpha^2 + 2 = 0$ είναι διπλάσια της άλλης.

18. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ο λόγος των ριζών της εξίσωσης $x^2 + \alpha x + \alpha + 2 = 0$ είναι ίσος με $\frac{1}{2}$.

19. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, οι ρίζες x_1 και x_2 της εξίσωσης $x^2 - \left(3\alpha + 2\right)x + \alpha^2 = 0$, ικανοποιούν τη σχέση $x_1 = 9x_2$. Κατόπιν να βρεθούν οι ρίζες.

20. Έστω $S_\nu = x_1^\nu + x_2^\nu$ όπου x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + px + q$. Να αποδείξετε ότι: $S_\nu + pS_{\nu-1} + qS_{\nu-2} = 0$.

21. Η εξίσωση $\left(\alpha - 2\right)x^2 - \left(5 - \alpha\right)x - 5 = 0$ έχει ρίζες x_1, x_2. Να βρείτε τον $\alpha \in \mathbb{R}$ αν γνωρίζετε ότι $x_1 - x_2 = 2\sqrt{6}$.

22. Χωρίς να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $3x^2 - 17x - 14 = 0$, να υπολογίσετε την παράσταση: $\Pi = \dfrac{2x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2}{4x_1x_2^2 + 4x_1^2x_2}$.

23. Αν x_1 και x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $(2\kappa+1)x^2-(\kappa+2)x+\kappa-1=0$, να υπολογίσετε το $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η σχέση: $x_1^3x_2+x_1x_2^3=\dfrac{3\kappa(1-\kappa^2)-6}{(2\kappa+1)^3}$.

24. Να βρείτε τον $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $x^2-5\alpha(x-2\alpha)-3\alpha+2=0$ να είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων τους.

Εξίσωση με γνωστό άθροισμα και γινόμενο ριζών

25. Να γράψετε την εξίσωση που έχει ρίζες τους αριθμούς

(i) 2α και $-\alpha$ (ii) $\alpha+\beta$ και $\alpha-\beta$ (iii) $-\dfrac{\alpha}{3}$ και $\dfrac{\alpha}{5}$

(iv) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ και $\dfrac{\beta}{\alpha}$ (v) $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$ και 1 (vi) $\dfrac{\kappa+\lambda}{2}$ και $\dfrac{\kappa-\lambda}{2}$.

26. Να βρείτε την εξίσωση β βαθμού που έχει ρίζες αντίστροφες των ριζών των εξισώσεων

(i) $x^2+33x-108=0$ (ii) $x^2+\kappa x+\lambda=0$ (iii) $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

27. Να βρείτε την εξίσωση β βαθμού της οποίας οι ρίζες x_1 και x_2 έχουν γινόμενο 4 και ισχύει η σχέση $\dfrac{x_1}{x_1-1}+\dfrac{x_2}{x_2-1}=\dfrac{\alpha^2-7}{\alpha^2-4}$.

28. Να βρείτε την εξίσωση β βαθμού της οποίας οι ρίζες x_1 και x_2 έχουν άθροισμα 2 και ισχύει η σχέση $\dfrac{1-x_1}{1+x_2}+\dfrac{1-x_2}{1+x_1}=2\cdot\dfrac{4\alpha^2+15}{4\alpha^2-1}$.

29. Έστω $\alpha=\dfrac{\sqrt{5}+1}{3-2\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-2}+3(\sqrt{2}-\sqrt{5})$ και x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-8x+\alpha=0$. Να βρείτε την εξίσωση που έχει ρίζες αντίστροφες των τετραγώνων των ριζών της παραπάνω εξίσωσης.

30. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2+8x+12=0$, να βρείτε την εξίσωση που έχει ρίζες τους αριθμούς $\psi_1=\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2}$ και $\psi_2=\dfrac{5x_1x_2}{x_1+x_2}$.