ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ Γ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΓΙΑ ΔΥΝΑΤΟΥΣ ΛΥΤΕΣ 1.

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Δίνεται συνάρτηση f : R→R παραγωγίσιμη και f(1)-f(0)=e και g: $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ →R συνεχής .

Για κάθε xϵR ισχύει : $f'(x) = e^x+2x+\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}[g(x) - \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}]^2\,dx$

Α) Να δειχθεί ότι υπάρχει ξϵ(Ο,1) : $f'(\xi) = e^{\xi} +2\xi$

Β) Να δειχθεί ότι $g(x) = \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$, $\frac{-\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$

Γ) Να μελετηθεί η μονοτονία . να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα και το σύνολο τιμών της g .

Δ) Να δείξετε ότι η g είναι 1-1 και να λυθεί η εξίσωση : $\eta\mu[g^{-1}(\frac{2\pi}{9}) + g^{-1}(\frac{4\pi}{3})]\, x^2 = \eta\mu^2\chi$

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

Εστω η συνάρτηση f:[0,2]→R για την οποία ισχύουν

*Η f είναι συνεχής στο[0,2]

*Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,2)

* $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-f(0)x^2+f(2)x-4}{x-2} =6$

Α) Να υπολογίσετε τις τιμές f(0) και f(2)

Β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ ϵ [0,1] ώστε f(ξ) =f(ξ+1)

Γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_F παράλληλη στον άξονα $x'x$

Δ) Αν f(1) =1 να αποδείξετε ότι υπάρχουν σημεία της C_F με τετμημένες x_1 , x_2 στα οποία οι εφαπτομένες είναι κάθετες .

ΘΕΜΑ 3^{Ο}

Εστω η συνάρτηση f: R^*→R για κάθε xϵR^* ισχύει : $\int_1^2 xf(x)dx$ = f(x) + $\frac{x^3-1}{x^3}$

Α) Να δειχθεί $f(x) = \frac{x^3+1}{x^3}$, x ϵ R

Β) Αν $g(x) = \sqrt{\frac{x^3+1}{x^3}}$

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της g

ii) Να μελετηθεί η μονοτονία , η κυρτότητα της g και να βρεθεί το σύνολο τιμών της

iii) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες και να γίνει η γραφική της παράσταση

iv) Να δειχθεί ότι για καθε x > 0 ισχύει: $f(x)e^{\frac{1}{f(x)}} > f(x) + 1$

v) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I =\int_1^2 \frac{g(x)}{x^4}\,dx$.

Π. ΠΕΤΡΟΧΕΙΛΟΥ