

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΓΙΑ ΔΥΝΑΤΟΥΣ ΛΥΤΕΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ 2(ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο : $f(x) = (\eta\mu\alpha)^x + (\sigma\upsilon\nu\alpha)^x$, όπου $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και κυρτή.

B) Να λύσετε την ανίσωση: $(\eta\mu\alpha)^{f(x)} + (\sigma\upsilon\nu\alpha)^{f(x)} < \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha$

Γ) Να λύσετε την εξίσωση : $f(\frac{1}{x} + 1) + \ln x = 1$, $x \in (0, +\infty)$

Δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$

Ε) Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = |f(x) - x|$

i) Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x = x_0$ (του ερωτηματος Δ).

ii) Ισχύει το συμπέρασμα του ΘΦ για τη συνάρτηση g στο σημείο $x = x_0$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας .

Z) Να αποδείξετε ότι : $\int_0^2 f^2(x) dx > f(2) \int_0^2 f(x) dx$

ΘΕΜΑ 5^ο

Εστω $f: \Delta = (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο Δ .

Η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f , η f έχει το πολύ δύο αρνητικές τιμές και μία τουλάχιστον θετική τιμή και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει : $2\sqrt{\ln x} f'(x) = c f^2(x) (2\ln x + 1)$, $c \in \mathbb{R}$

A) Να αποδείξετε ότι η $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

B) Να αποδείξετε ότι $c < 0$

Γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Δ) Αν $\int_e^{e^4} f(x) dx = 2$, τότε να βρείτε το c

N. ΠΕΤΡΟΧΕΙΛΟΥ